



# Introduction à la Fonction d'Effectivité

Dawidson Razafimahatolotra

## ► To cite this version:

| Dawidson Razafimahatolotra. Introduction à la Fonction d'Effectivité. 2009. halshs-00399903

**HAL Id: halshs-00399903**

**<https://shs.hal.science/halshs-00399903>**

Preprint submitted on 29 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Introduction à la Fonction d'Effectivité

Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA \*  
École d'Économie de Paris  
Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

29 juin 2009

## Résumé

Le pouvoir d'un groupe d'acteurs se mesure par ses capacités à atteindre ses objectifs dans une situation donnée, et sa répartition dans une organisation est représentée par une fonction d'effectivité. Cette représentation nous permet de faire une analyse formelle du pouvoir dont les modes d'acquisition, les conflits, les moyens de régulation ainsi que le mécanisme du choix de l'issue finale de l'organisation. Dans la première partie, nous traitons plusieurs questions sur le pouvoir et dans la deuxième partie nous étudions la fonction d'effectivité afin de montrer comment résoudre formellement les problèmes posés dans la première partie.

**Mots-clés** : Fonction d'effectivité, distribution de pouvoir, conflit, stabilité.

**JEL Classification** : C71, C79.

**AMS classification** : 91A12

---

\*razafimahatolotra@yahoo.ca

## 1 Introduction

Une organisation est un ensemble d'acteurs agissant selon la structure du pouvoir et la distribution de l'autorité. Le pouvoir d'un individu ou d'un groupe d'individus se mesure par ses capacités à atteindre ses objectifs. L'effectivité du pouvoir d'un membre de l'organisation peut résulter de ses compétences, de ses influences ou de ses rapports fonctionnels avec d'autres membres : par sa réputation, par ses qualités de persuasion, sa crédibilité et tout simplement par ses positions et sa fonction dans l'organisation. Mais, d'autres facteurs plus conventionnels sont également à l'origine du pouvoir : les moyens d'actions et les libertés attribuées par une structure extérieure ; comme par exemple, dans une entreprise où les pouvoirs et les autorités sont définis par rapport à l'objectif et l'organigramme de l'entreprise. Dans nos études de cas dans le projet DELICOM<sup>1</sup>, nous avons observé que la confusion et le chevauchement des limites des pouvoirs des parties prenantes d'une organisation risquent de conduire au désordre ou à l'immobilisme par le manque de moyens d'action, qui paralyse l'organisation.

Sur le plan technique et mathématique, la question du pouvoir peut être un problème de mesure et de grandeur (tel joueur en possède plus qu'un autre), mais aussi de structure. Dans le premier cas, la mesure des influences sur les états de la nature est représentée par une distribution de nombres qui permet de comparer les pouvoirs relatifs de chaque joueur. Ce procédé est alors conventionnel, et les interprétations qui en découlent dépendent de l'orientation, généralement normative, de l'analyse. Pour les *indices de pouvoir* de Shapley-Shubik [32], [33], [34], [38] ou celui de Banzhaf [8], [16], [9], [13] ou autres, les états de la nature forment un ensemble totalement ordonné. Cette représentation permet de calculer l'influence d'un individu sur la base de ses apports marginaux. Dans le deuxième cas, où les états de la nature sont des objets qualitatifs, la mesure et la comparaison des coalitions par une grandeur sont inadéquates. Par exemple, pour le choix de la politique énergétique dont les alternatives sont l'énergie renouvelable, l'énergie fossile, l'énergie nucléaire, d'autres énergies, le problème ne se pose pas en terme de mesure car un joueur peut par exemple imposer l'énergie nucléaire, non pas par rapport à une valeur mesurable mais par ses compétences en la matière et la disponibilité des moyens techniques et des ressources nécessaires.

Les études du pouvoir fondées sur les *indices de pouvoir* admettent en général l'hypothèse implicite d'unité et de cohérence de ses sources. Par exemple, les pouvoirs sont déterminés par une règle de vote ou encore les pouvoirs découlent de l'organigramme de l'organisation. Toutefois, nos études de cas comme celui du programme DELICOM montrent que

---

1. <http://epi.univ-paris1.fr>

le pouvoir dans une organisation peut avoir des sources multiples et non homogènes. L'institutionnalisation de certaines règles et normes sociales relatives à une conviction éthique, idéologique ou religieuse est une cause à cette multiplicité. Celle-ci entraîne également une fracture entre les moyens d'actions formels et les pouvoirs réels. La méconnaissance des sources du pouvoir peut avoir des conséquences sur la *description* des états sociaux et favorise l'incohérence des actions. Supposons que l'État donne plus de moyens financiers à une institution chargée de la protection de l'environnement et supposons que celle-ci manque de spécialistes compétents alors qu'une autre institution ou organisation sans souci de l'environnement possède des moyens humains et techniques dynamiques et innovants. Le pouvoir formel prévoit que l'issue sociale soit dans un ensemble d'alternatives qui ne nuit pas à l'environnement, pour lequel les moyens financiers ont été déployés, mais le pouvoir réel de la deuxième institution peut désorienter les objectifs de ces fonds de sorte que l'issue sociale ne soit pas respectueuse de l'environnement. On observe les mêmes phénomènes dans les systèmes pluralistes où chaque interprétation de la norme donne lieu à une structure de pouvoir. Voir [29] et le document de HDR de Picavet Emmanuel : Talos ou la matrice libérale [27].

Nous identifions et tentons donc d'élucider dans le présent travail deux problèmes relatifs aux pouvoirs dans une organisation : la structure de pouvoir selon une source donnée et la coexistence de plusieurs structures de pouvoirs qui donnent lieu aux problèmes des institutions tels que la cohérence des actions et la migration du pouvoir, et au contraste entre le pouvoir réel et le pouvoir formel.

L'instrument dont nous disposons pour unifier ces deux catégories de problèmes concerne la fonction d'effectivité, introduite par H. Moulin & B. Peleg [23](1982) dans l'objectif de généraliser les correspondances de veto proportionnel [21], [22]. Une fonction d'effectivité définit la répartition de pouvoir d'une organisation, les états sociaux étant un ensemble qui peut ne pas avoir de structure. Elle associe à chaque coalition une famille de sous ensembles de l'ensemble des états sociaux. L'appartenance d'un ensemble à l'effectivité d'une coalition signifie que celle-ci a le pouvoir de bloquer les alternatives de son complémentaire. La fonction d'effectivité est de plus en plus utilisée comme dans l'ouvrage de Ishiishi "The cooperative nature of the firm" ou celui de Bezalel Peleg [25],[26], Vannucci S.[37], van Hees [35], et se présente actuellement comme l'instrument le plus général de la théorie des jeux en matière de sciences sociales. Elle permet également d'unifier les approches stratégiques des approches coalitionnelles et complète le triangle d'implémentation entre les formes de jeux, les correspondances de choix social et les solutions institutionnelles. D'autres formulations de la structure du pouvoir ont été proposées par J. Abdou & H.Keiding (1990)

(fonction d'effectivité locale ou structure d'effectivité), mais nous restons sur les fonctions d'effectivité, dites globales, car elles sont suffisantes pour rendre compte des problèmes que nous avons posés.

Ce travail aura deux parties. Dans la première, nous montrons en quoi une fonction d'effectivité renvoie à la fois à une catégorie théorique du pouvoir et à des faits observables. Nous y montrons également la procédure de formalisation et les problèmes techniques et théoriques posés par cette méthode. La deuxième partie présentera la fonction d'effectivité d'un point de vue mathématique : sa définition, ses propriétés, les problèmes étudiés ainsi que les résultats principaux avec leurs interprétations en matière de pouvoir et d'organisation.

## 2 Le pouvoir dans une organisation

### 2.1 L'aspect formel du pouvoir

Le pouvoir en tant que fait social est une notion observable à travers les modifications des états sociaux, qui traduisent le pouvoir de celui par qui elles ont été faites. Un état social est une alternative sans aucune relation de dépendance avec les influences relatives des joueurs dans la société. Pourtant, cela n'exclut pas le fait qu'un état social soit exprimé en matière de position relative d'un joueur par rapport à un autre ; comme un joueur dépend d'un autre pour agir. Ainsi, la formalisation du pouvoir dépend de la représentation qu'on se fait des états de la nature. Cette représentation découle des programmes politiques ou des actions conjointes des joueurs.

Pour commencer, considérons l'exemple d'une organisation où les états sociaux sont des nombres réels. Cela permet de construire une fonction réelle qui associe à chaque coalition un nombre mesurant ses capacités. Dans ce cas, les opérations mathématiques usuelles (différenciation, comparaison etc.) ont un sens. Le cas des jeux à utilités transférables est un exemple de situation où les états sociaux sont des nombres. En effet, si  $N = \{1, \dots, n\}$  désigne l'ensemble des joueurs, alors à chaque coalition  $S \subset N$ , on peut associer le nombre  $\nu(S)$  dit valeur de  $S$ . Par conséquent, pour chaque  $i \in N$  et  $S \subset N \setminus \{i\}$ ,  $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$  mesure l'apport de  $i$  dans  $S \cup \{i\}$ . Donc, dans le cas où il n'y a aucune restriction pour entrer dans les coalitions, la moyenne sur tous les  $S \subset N \setminus \{i\}$  donne la contribution marginale de  $i$ . Cette technique d'évaluation, avec le choix de la formule de la moyenne, est à la base de l'*indice de pouvoir* de Shapley-Shubik [33] et de celui de Banzhaf [13] (2003). Celui de Banzhaf est par exemple donné par :

$$\varphi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$$

Notons que les travaux de Dubey et al. ont donné une complète caractérisation de l'indice de Banzhaf et montrent que cet indice est adéquat pour les votes à deux étapes.

Les indices de pouvoir ont beaucoup d'importance pour les jeux de vote, en particulier ceux avec pondérations, car ils permettent de déterminer les quotas de vote de chaque joueur selon une structure de coalition voulue. Supposons par exemple qu'il y ait quatre joueurs  $\{1, 2, 3, 4\}$  et l'issue sociale sera sélectionnée selon le vote à majorité simple. Pour que 1 ne soit pas perçu comme un dictateur même s'il en est presque, on lui donne un quota tel que  $\varphi(i) + \varphi(j) \leq 50\%, \forall i, j \in \{2, 3, 4\}$ . Donc, pour que le joueur  $\{1\}$  puisse avoir une position essentielle, voire dictatoriale, il suffit qu'on attribue aux membres de  $\{2, 3, 4\}$  des pouvoirs tels que la formation de la coalition  $S \cup \{1\}$  soit aussi naturelle que possible, pour tout  $S \subset \{2, 3, 4\}$ . Par exemple, les quotas sont  $(28\%, 24\%, 24\%, 24\%)$ . Dans ce cas,  $\{1, j\}$  ( $i = 2 \dots 4$ ) sont des coalitions gagnantes alors que  $\{i, j\}$  ( $i, j = 2 \dots 4$ ) ne le sont pas.

Supposons maintenant que les états sociaux ne sont pas des nombres mais des alternatives non divisibles telles que  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Si l'ensemble  $A$  ne possède aucune structure, alors être en mesure de bloquer un ensemble d'alternatives  $B \subset \{x_1, \dots, x_n\}$  n'exprime que le pouvoir de la coalition et ne donne aucune indication si celle-ci possède autant de pouvoir qu'une autre ou non. Dans ce cas, une inéquation de type  $\varphi(i) \leq \varphi(j), \forall i, j \in N$  n'a aucun sens. Pour illustration, considérons l'exemple suivant :

**Exemple 2.1.** *Soit une famille à trois personnes  $\{Père, Mère, Fils\}$  où chaque décision est un dernier terme d'échanges d'arguments, et les alternatives sont les couleurs du mur de la maison, disons  $\{Bleu, Blanc, Vert\}$ .*

Ici, imposer une couleur ne reflète que la capacité argumentative d'exclusion des autres couleurs de la coalition. Supposons que la distribution des pouvoirs est définie comme suit : le père a des arguments persuasifs pour imposer la couleur blanche, la mère a les arguments nécessaires pour rayer la couleur bleue et la mère avec l'enfant a les moyens d'imposer n'importe quelle couleur de leur choix. Mathématiquement, la coalition  $\{Père\}$  est effective pour  $\{Blanc\}, \{Blanc, Bleu\}, \{Blanc, Vert\}$  et  $\{Blanc, Bleu, Vert\}$ . La coalition  $\{Mère\}$  est effective pour  $\{Blanc, Vert\}, \{Blanc, Vert, Bleu\}$  et la coalition  $\{Mère, Fils\}$  est effective pour tout ensemble non vide  $B \subset \{Bleu, Blanc, Vert\}$ .

Dans cet exemple, les états sociaux sont des objets qualitatifs. Mais, en général ils peuvent être des ensembles mesurables comme l'exemple d'un assemblée à  $n$  députés où le jeu consiste à attribuer à chaque coalition de taille  $s$  le droit de veto contre  $b(s)$  alternatives. Si  $b(s)$  est relativement proportionnel à la taille  $s$  de la coalition  $S$ , alors  $b(s) = \lceil s \frac{m}{n} \rceil - 1$  où  $\lceil x \rceil =$

$\min \{n \in N \mid x \leq n\}$ . On appelle fonction d'effectivité, selon un concept que nous préciserons plus tard, cette opération qui consiste à associer à chaque coalition une famille d'ensembles d'alternatives  $\{B_1(S), \dots, B_s(S)\}$  telle que  $S$  soit effectif pour bloquer tout  $x \notin B_k(S), \forall k = 1 \dots s$ .

Notons qu'il est possible que l'on attribue à  $A$  une structure mathématique comme la structure hilbertienne, la structure topologique ou autre, selon le type du problème considéré mais notre propos consiste à décrire le pouvoir dans son aspect le plus général. Dans ce cas, nous nous abstenons de donner une structure particulière à  $A$ . C'est-à-dire que sur le plan technique, les opérations sur une fonction d'effectivité restent dans le domaine de l'arithmétique et de la théorie des ensembles. En outre, une fonction d'effectivité n'est pas un outil de prévision mais plutôt un outil de description, d'explication, de normalisation ou de justification des faits relatifs aux pouvoirs.

Par la suite, l'ensemble des joueurs est représenté par  $N = \{1, \dots, n\}$  et l'ensemble des alternatives par  $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Une coalition  $S$  est un sous ensemble de  $N$ . Pour un ensemble  $X$ , on note  $\mathcal{P}(X) = \{Y \subset X\}$  et  $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Chaque joueur  $i \in N$  classe les éléments de  $A$  par une relation d'ordre linéaire  $R^i$  qui sera appelé sa préférence. Le profil de l'organisation est noté  $R^N = (R^1, \dots, R^n)$  et un  $S$ -profil, pour une coalition  $S = \{i_1, \dots, i_s\}$  est  $R^S = (R^{i_1}, \dots, R^{i_s})$ . Si  $P(S, R^N, x) = \{y \in A \mid \forall i \in S, y R^i x\}$ , alors une alternative  $x$  est *dominée* s'il existe une coalition  $S$  effective pour  $P(S, R^N, x)$ . Une *objection* contre l'état social  $x \in A$  dans le profil  $R^N$  est une paire  $(S, B)$  telle que  $S$  est effective pour  $B$  et  $\forall i \in S, \forall y \in B; y R^i x$ .

## 2.2 Acquisition du pouvoir

Le mode d'acquisition du pouvoir détermine en partie sa nature donc le choix de sa formalisation. A propos du pouvoir, nous distinguons ses origines en trois catégories : brute - stratégique - conventionnelle.

Ce paragraphe est dans l'objectif de montrer comment une fonction d'effectivité peut rendre compte des problèmes de pouvoir et en quoi il ne s'agit pas seulement d'un concept théorique mais également d'une représentation des faits observables.

### 2.2.1 Acquisition par la stratégie

L'acquisition par la stratégie suppose que l'organisation possède une structure, pas nécessairement institutionnelle ou administrative, par laquelle chaque joueur a une liste d'actions totalement ou partiellement connue

par tous les membres de l'organisation. Soit  $\Sigma_i$  l'ensemble des actions possibles du joueur  $i \in N$ . Les actions conjointes des membres d'une coalition  $S$  sont retracées par :  $\Sigma_S = \prod_{i \in S} \Sigma_i$ . Donc, si la coalition  $S$  adopte la stratégie  $\sigma_S \in \Sigma_S$  et son complémentaire  $N \setminus S$  prend  $\tau_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}$ , l'action conjointe  $(\sigma_S, \tau_{N \setminus S})$  donne un état social  $\pi(\sigma_S, \tau_{N \setminus S})$ . Soit  $\pi : \prod_{i \in N} \Sigma_i \longrightarrow A$  une application surjective, dite *fonction de conséquence*, qui détermine les états sociaux atteignables. Alors, être effectif pour bloquer une alternative  $x \in A$  dépend de l'existence d'une stratégie conjointe  $\sigma \in \Sigma$  telle que  $\pi(\sigma) = y \neq x$ . Considérons l'exemple suivant pour illustration :

**Exemple 2.2.** *Deux textes d'une référence juridique qui donnent du pouvoir à deux groupes différents.*

*Texte 1* : Le médecin est libre d'utiliser ses méthodes de soin, pourvu que ses démarches soient validées par un comité d'experts. *Texte 2* : toute personne qui cause l'infirmité ou la mort d'un tiers, volontairement ou non, est passible de prison. *Situation* : Un médecin a appliqué une méthode innovante pour laquelle la probabilité des effets négatifs imprévisibles est estimée à moins de 10% et un patient trouve la mort à la suite d'un traitement. Alors les acteurs du jeu sont  $\{1, 2\}$  (1 le médecin et 2 les juges) et supposons que les issues sociales sont  $\{x_1, x_2, x_3\}$  où  $x_1$  est l'alternative "Pas de sanction",  $x_2$ , "Sanction symbolique" et  $x_3$  "Sanction sévère".

Supposons que les interprétations de 1 et 2 de ces textes sont respectivement  $\Sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$  et  $\Sigma_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$  avec

$a_1$  : Sans arguments : le médecin ne trouve aucun argument pour défendre à sa cause.

$a_2$  : L'acception du mot liberté s'étend jusqu'à la permission d'agir quelles que soient les conséquences dans les limites du raisonnable.

$a_3$  : Le texte est flou, donc une description des conditions de mise en application aurait dû l'accompagner.

$b_1$  : Le mot liberté n'inclut pas les actions à risque qui peuvent conduire à des erreurs ;

$b_2$  : Les erreurs sont tolérables en cas de bonne foi ;

$b_3$  : La liberté d'agir n'a aucune limite pourvu que les résultats attendus sont jugés d'utilité publique.

Maintenant, supposons que cette forme de jeu  $(\Sigma, \pi, A)$  est donnée par :

		Joueur 1		
Joueur 2		$a_1$	$a_2$	$a_3$
	$b_1$	$x_3$	$x_3$	$x_3$
	$b_2$	$x_3$	$x_2$	$x_1$
	$b_3$	$x_1$	$x_1$	$x_3$



En matière de pouvoir, nous avons par exemple que  $\pi(a_k, b_1) = x_3$ ,  $\forall k = 1 \dots 3$  et  $\pi(a_2, b_k) \in \{x_1, x_3\}$ ,  $\forall k = 1 \dots 3$ . Il est naturel de penser ici que  $\{2\}$  a le pouvoir de forcer  $x_3$ , quelles que soient les interprétations adoptées. En général, il y a deux procédures pour décrire les pouvoirs de  $\{1\}$  et de  $\{2\}$  à partir de cette forme de jeu.

P1 : *Le joueur  $\{1\}$  ou  $\{2\}$  est effectif pour  $B \subset \{x_1, x_2, x_3\}$  s'il existe une interprétation de  $\{1\}$  ou  $\{2\}$  telle que quelle que soit l'interprétation de  $\{2\}$  ou  $\{1\}$ , la conséquence de l'action conjointe est dans  $B$ . Donc :*

$$\begin{aligned} E_\alpha(\{1\}) &= \{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} ; \\ E_\alpha(\{2\}) &= \{\{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} ; \\ E_\alpha(\{1, 2\}) &= \{B \neq \emptyset \mid B \subset \{x_1, x_2, x_3\}\} \end{aligned}$$

P2 : *Le joueur  $\{1\}$  ou  $\{2\}$  est effectif pour  $B \subset \{x_1, x_2, x_3\}$  si pour chaque interprétation de  $\{2\}$  ou  $\{1\}$ , il existe une interprétation de  $\{1\}$  ou de  $\{2\}$  telle que la conséquence de l'action conjointe est dans  $B$ . Donc*

$$\begin{aligned} E_\beta(\{1\}) &= \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} ; \\ E_\beta(\{2\}) &= \{B \neq \emptyset \mid B \supset \{x_3\} \text{ ou } B \supset \{x_1, x_2\}\} ; \\ E_\beta(\{1, 2\}) &= \{B \neq \emptyset \mid B \subset \{x_1, x_2, x_3\}\} \end{aligned}$$

Le comportement dans P2 est plus adaptatif que celui dans P1 et offre plus de pouvoir.

Formellement, il y a plusieurs procédures pour acquérir le pouvoir à partir d'une forme de jeu. Les plus connus sont l' $\alpha$ -effectivité et la  $\beta$ -effectivité, mais il y a d'autres types de garantie de pouvoir comme les exactes et bi-exactes [3]. ( Pour l' $\alpha$  et  $\beta$  effectivité, voir [3] ou [12] ou les travaux de B. Peleg comme par exemple [25]). Une coalition  $S$  est  $\alpha$ - effective pour un ensemble d'alternatives  $B$  s'il existe  $\sigma_S \in \Sigma_S$  tel que pour tout  $\tau_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}$ ,  $\pi(\sigma_S, \tau_{N \setminus S}) \in B$ . C'est à dire que  $S$  possède une stratégie conjointe  $\sigma_S$  qui lui permet de bloquer tous les états sociaux en dehors de  $B$ , quelles que soient les stratégies conjointes adoptées par les joueurs restants. D'une manière duale, une coalition  $S$  est  $\beta$ - effective pour un ensemble d'alternatives  $B$  si pour tout  $\tau_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}$  il existe  $\sigma_S \in \Sigma_S$  tel que  $\pi(\sigma_S, \tau_{N \setminus S}) \in B$ . Ces deux procédés nous donnent deux fonctions d'effectivité :

1. *Alpha-effectivité* : Soit  $G = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, A, \pi)$ . On définit

$$E_\alpha^G(S) = \{B \in \mathcal{P}_0(A) \mid \exists \sigma_S \in \Sigma_S \text{ tel que } \forall \tau_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S} : \pi(\sigma_S, \tau_{N \setminus S}) \in B\}$$

Une coalition  $S$  peut se garantir de  $B$  à condition qu'elle ait la possibilité d'agir avant les autres de sorte que quoi que fasse  $N \setminus S$ , la conséquence de l'action commune  $\pi(\sigma_S, \tau_{N \setminus S})$  ne soit jamais en dehors de  $B$ .

2. *Beta-effectivité* : Soit  $G = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, A, \pi)$ . On définit

$$E_\beta^G(S) = \{B \in \mathcal{P}_0(A) \mid \forall \sigma_S \in \Sigma_S \text{ tel que } \forall \tau_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S} : \pi(\sigma_S, \tau_{N \setminus S}) \in B\}$$

Une coalition  $S$  peut se garantir  $B$  pourvu qu'elle ait le moyen de répondre aux actions des autres afin que la conséquence de l'action commune  $\pi(\sigma_S, \sigma_{N \setminus S})$  ne soit pas en dehors de  $B$ . Ce type de garantie de pouvoir offre à  $S$  une large marge de manoeuvre par comparaison avec le type de garantie alpha, car il suffit qu'il ait le moyen de bien répondre aux actions des autres pour s'approprier du pouvoir.

### 2.2.2 Attribution conventionnelle

L'attribution conventionnelle de pouvoir ne fait référence ni aux forces ni aux stratégies des joueurs. Elle peut être attribuée de manière purement conventionnelle et normative comme dans le cas des pouvoirs attribués au Comité d'Administration et aux salariés dans une entreprise, ou d'un système de lois qui attribuent aux citoyens leurs droits et devoirs. Dans ce cas, on décrit tout simplement les limites du pouvoir de chaque coalition ainsi que les propriétés de sa répartition. Dans un autre cas, le pouvoir passe par un mécanisme de *correspondance de choix social*. C'est-à-dire qu'à partir d'un profil de préférences  $R^N$ , on définit une préférence, disons  $f(R^N)$ , une agrégation des préférences, qui sera la préférence sociale et fixera l'issue du jeu. Ainsi, nous décrivons une application,  $H : \mathcal{L}^N(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$  qui sélectionne l'issue du jeu. Pour illustration, prenons les trois exemples suivants :

**Exemple 2.3.** *Les membres de l'organisation se sont mis d'accord pour confier à un joueur  $i_0 \in N$  le choix de l'issue sociale. Donc,  $f(R^N) = R^{i_0}$ .*

Par conséquent,  $H(R^N)$  est la meilleure option aux yeux du joueur  $i_0$ . En matière de pouvoir, quel que soit le profil  $Q^{N \setminus \{i_0\}}$  des joueurs restants  $N \setminus \{i_0\}$ ,  $H(R^{i_0}, Q^{N \setminus \{i_0\}})$  ne dépend que de la préférence de  $i_0$ . Ainsi, les coalitions ne contenant pas  $i_0$  n'ont aucun pouvoir pour déterminer l'issue du jeu alors que les coalitions contenant  $i_0$  ont ce pouvoir. Donc,  $E(S) = \{A\}$  si  $i_0 \notin S_0$  et  $E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$  si  $i_0 \in S$ .

**Exemple 2.4.** *La préférence du joueur  $i \in N$  est comptée  $n(i)$  fois et on définit la préférence sociale  $f(R^N)$  par*

$$x f(R^N) y \Leftrightarrow \sum n(i) \mid x R^i y > \sum n(i) \mid y R^i x$$

La structure de pouvoir définie à partir de cette règle est définie par :  $E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$  si  $\sum_{i \in S} n(i) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  et dans les autres cas  $E(S) = \{A\}$ .

**Exemple 2.5.** Dans un profil  $R^N$ , chaque joueur  $i \in N$  attribue un point  $p_i(R^N, x)$  pour l'alternative  $x \in A$  (1 pour la pire alternative et  $m$  pour la meilleure).

Dans le profil  $R^N$ , on calcule la somme des points obtenus par chaque  $x$ ,  $P(R^N, x) = \sum_{i \in N} p_i(R^N, x)$  on garde celle qui obtient le plus de points. Donc  $f(R^N)$  est définie comme suit :

$$x f(R^N) y \Leftrightarrow \sum_{i \in N} p_i(x) > \sum_{i \in N} p_i(y)$$

Ici, on peut supposer que  $A = \{x_1, \dots, x_m\}$  et si  $\sum_{i \in N} p_i(x_k) = \sum_{i \in N} p_i(x_l)$ , alors il y a une indétermination sur l'issue du jeu.

Le pouvoir qui découle de  $H$  ne dépend que du nombre de joueurs et du nombre des alternatives. Une coalition  $S$  qui compte  $s$  membres est effective pour bloquer tout  $y \notin B$ , pour  $B \subset A$ , si  $B R^S y R^S (A \setminus B \cup \{y\})$  entraîne  $y \notin H(R^N)$ , i.e il existe  $x \in A$  (ce qui est nécessairement dans  $B$ ) tel que  $P(x) > P(y)$ . Pour une paire  $(S, B)$  et  $y \notin B$ , notons :

$$\mathcal{L}(S, B, y) = \{R^N \mid B R^S y R^S (A \setminus (B \cup \{y\}))\}$$

Alors, une coalition  $S$  est effective pour un ensemble d'alternatives  $B$  si et seulement si

$$\min_{R^N \in \mathcal{L}(S, B, y)} \max_{x \in B} P(R^N, x) > \max_{y \notin B} \max_{R^N \in \mathcal{L}(S, B, y)} P(R^N, y) \quad (1)$$

Or, :

$$\begin{aligned} \max_{y \notin B} \max_{R^N \in \mathcal{L}(S, B, y)} P(R^N, y) &= (m - b)s + m(n - s) ; \\ \min_{R^N \in \mathcal{L}(S, B, y)} \max_{x \in B} P(R^N, x) &= m - bs + \left\lceil \frac{b+1}{2}n \right\rceil ; \end{aligned}$$

alors :

$$s > n - \frac{1}{m} \left\lceil \frac{b+1}{2}n \right\rceil \quad (2)$$

Notons que si l'ensemble des alternatives ne compte que deux éléments, cette règle est identique au vote à majorité simple.

La répartition du pouvoir selon cette règle de vote est donc définie par  $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$  pour toute coalition  $S$  telle que  $s \geq n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1$  et  $S$  est effective pour un ensemble d'alternatives à  $b$  éléments si le nombre de joueurs de  $S$ ,  $s$  satisfait l'équation 2. Pour les avantages du principe de rang par rapport au vote à majorité simple, études du cas de la présidentielle française de 2007, voir les travaux de Baujard Antoinette & al. [6].

Plus généralement, à une correspondance de choix social  $H$ , on peut associer une fonction d'effectivité  $E^H$  ou  $E_\kappa^H$  telle que

$$E^H(S) = \{B \mid \exists R^S \text{ tel que } \forall Q^{N \setminus S}, H(R^S, Q^{N \setminus S}) \in B\} ;$$

$$E_\kappa^H(S) = \{B \mid \forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N, y \in A \setminus B : [B R^S y R^S A \setminus (B \cup \{y\})] \Rightarrow y \notin H(R^N)\}$$

### 2.2.3 Acquisition par la force

La force est un élément émanant d'un individu susceptible de modifier l'état d'un objet auquel la force est exercée. Un joueur ou une coalition a ainsi le pouvoir par la force s'il arrive à supprimer toutes les forces résistantes à ses objectifs. Nous la définissons de manière négative afin d'y inclure les jeux où les actions des autres n'ont aucun effet sur l'issue du jeu. Prenons l'exemple d'un jeu à deux joueurs  $\{1, 2\}$  tel que  $\Sigma_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\Sigma_2 = \{y_1, \dots, y_p\}$  et  $\pi(x_k, y_l) = f(x_k), \forall k = 1 \dots n, l = 1 \dots p$ . Ici, les moyens de 2 ne sont que nominaux et ses actions sont tous neutralisées. Il en est de même pour les jeux de correspondance de choix social où l'issue du jeu ne dépend que de la préférence d'un seul ou d'un petit groupe de joueurs.

Une autre manière de s'approprier du pouvoir par la force consiste à éliminer progressivement des actions adverses ou les actions pouvant nuire à l'objectif visé. Nous terminons ce paragraphe par l'exemple de la *boîte d'Edgeworth* où la logique du jeu permet à un joueur de parvenir à une position de suppression des actions de son partenaire.

#### Exemple 2.6. Boîte d'Edgeworth

Supposons que le joueur 1 maîtrise parfaitement les produits financiers alors que le joueur 2 ne connaît rien à ce sujet. Les états sociaux possibles sont des couples  $(a_1, a_2)$  tels que  $a_1 + a_2 = \omega_1 + \omega_2$  où  $\omega_i$  désigne la dotation initiale de  $i$ . En absence de toute structure, 1 peut exercer son avantage en matière de finance pour qu'il ait le pouvoir d'atteindre n'importe quelle issue sociale dont  $(\omega_1 + \omega_2, 0)$  et que 2 est privé de pouvoir pour n'accepter que les propositions de 1.

## 2.3 Pouvoir, conflits et stabilités

La répartition du pouvoir dans une organisation détermine les positions prises par les joueurs ou les coalitions face à une situation donnée. Il est naturel de penser qu'une coalition, qui a le pouvoir de modifier le *statu quo*, veut un autre état social à condition que ce nouvel état social soit préféré contre l'état social initial, pour tous les membres de la coalition. Ainsi, la structure de pouvoir ne détermine pas seulement les moyens d'action des coalitions mais elle définit également la rationalité des actions prises par

les coalitions. Plus naturellement ou naïvement,<sup>2</sup> une coalition qui n'agit pas contre une proposition qui lui déplaît alors qu'elle a le pouvoir de le faire est jugée non-rationnelle. Donc, les coalitions se comportent en sorte de *s'opposer tout simplement à toutes situations non préférées tant que ses moyens le lui permettent*. Cette version de la rationalité, qui est la plus étudiée en théorie des jeux coopératifs et coalitionnels, a été définie pour la première fois dans le format de la fonction d'effectivité par Hervé Moulin & Belzalel Peleg[23]. Une version plus souple de la rationalité, qui est étudiée pour la première fois dans le format de la fonction d'effectivité par Hans Keiding & Razafimahatolotra D. consiste à accepter le dialogue.

Une fois que le mode de rationalité ou de la rationalisation des comportements des joueurs est défini, la question de stabilité ou de non stabilité devient la question principale en fonction d'effectivité. Par exemple, une répartition de pouvoir qui laisse à une famille de coalitions de bloquer toutes les alternatives disponibles est un problème sérieux en matière de choix social. Pour illustration, reprenons  $E_\beta$  de l'exemple 2.2 et supposons que les préférences sont :

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_1 \\ x_3 & x_2 \\ R^1 & R^2 \end{array}$$

Comme  $\{1\}$  a le pouvoir de bloquer l'alternative  $\{x_3\}$  et  $\{2\}$  a le pouvoir de bloquer  $\{x_1, x_2\}$  alors dans ce profil aucune alternative est sans opposition, donc la société formée par  $\{1, 2\}$  n'arrive pas à s'entendre sur ce que doit être l'issue du jeu.

Pour finir, reprenons l'exemple 2.3. Dans cet exemple, toute coalition ne contenant pas  $i_0$  est privée de pouvoir, donc les propositions de  $i_0$  ne risquent aucune opposition. Malgré cette stabilité, elle n'offre aucun moyen pour que d'autres joueurs agissent sans  $i_0$ . Cela nuit à la liberté, si *l'agir* est une expression de liberté, et risque d'altérer l'innovation et l'efficacité de l'organisation.

### 3 La fonction d'effectivité

Dans ce paragraphe, nous considérons la fonction d'effectivité en tant qu'objet mathématique. Toutefois, chaque définition est suivie d'une interprétation et de quelques discussions. Rappelons qu'une fonction d'effectivité associe à chaque coalition une famille d'ensembles qui décrit les limites de ses pouvoirs dans l'organisation. C'est-à-dire

---

2. Mot que nous empruntons de Bertrand Tchantcho à la suite de nos discussions sur la forme de la rationalité

**Définition 3.1.** Une fonction d'effectivité est une fonction de  $\mathcal{P}(N)$  dans  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (i)  $E(\emptyset) = \emptyset$  ;
- (ii)  $\forall S \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$ ,  $A \in E(S)$  et  $\emptyset \notin E(S)$  ;
- (iii)  $E(N) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ .

Le premier axiome signifie qu'aucun état social ne se réalise tout seul alors que  $\emptyset \notin E(S)$  suppose qu'aucune coalition ne peut rien faire à partir de rien. L'hypothèse  $A \in E(S)$  pour toute coalition  $S$  signifie que sans aucun effort particulier de  $S$ , l'issue sociale est dans  $A$ , ce qui confirme également l'exhaustivité de l'ensemble des alternatives du modèle. La dernière hypothèse  $E(N) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$  signifie que l'organisation composée de  $N$  joueurs est souveraine ; elle ne dépend d'aucune force extérieure pour atteindre un de ses états sociaux.

Ainsi, la rationalité supposée par la fonction d'effectivité suppose qu'aucune coalition agit de manière imprévisible. L'état de la nature peut être décrit avant toutes les interactions et les joueurs respectent les limites de leurs pouvoirs dans une règle donnée. Par exemple, si la règle est un vote, chacun agit selon ses pouvoirs par rapport à la règle du vote, si la règle est la logique de domination des plus compétents, chacun agit dans les limites de ses compétences etc.

### 3.1 Des exemples de fonctions d'effectivité

*La fonction d'effectivité simple.*  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$  ou  $E(S) = \{A\}$ . L'ensemble  $\mathcal{W}(E) = \{S \mid E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\}$  s'appelle l'ensemble des coalitions gagnantes. Donc, pour connaître les propriétés d'une fonction d'effectivité simple, il suffit d'étudier la structure de  $\mathcal{W}(E)$ . Cette classe de jeu regroupe en outre tous les jeux de vote (une personne un vote ou un vote avec pondérations). La plupart des correspondances de choix social répartissent le pouvoir en jeu simple.

*La fonction d'effectivité anonyme.*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ .  $|S| = |T|$  entraîne  $E(S) = E(T)$ . C'est le nombre qui fait le pouvoir. Ce jeu contient les jeux de vote *une personne un vote* sans être une généralisation des jeux simples. L'avantage des deux anonymes aux jeux simples c'est sa possibilité de partager le pouvoir de manière non grossière : sans pouvoir ou plein pouvoir seulement.

*La fonction d'effectivité neutre.*  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ .  $|B| = |C|$  entraîne  $B \in E(S) \Leftrightarrow C \in E(T)$ . Donc, les alternatives sont indistinguables. Par exemple, si l'issue sociale est une valeur monétaire, il suffit de connaître le contour supérieur pour décrire la totalité des pouvoirs des coalitions.

*La fonction d'effectivité décomposable.* Il existe deux jeux à utilités transférables normés  $(N, \nu)$  et  $(A, \omega)$  tels que  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N), \forall B \in \mathcal{P}(A) : B \in E(S)$  si et seulement si  $1 - \omega(B) \leq \nu(S)$ . Cette fonction est définie à deux niveaux. Premièrement, on mesure les coalitions et les alternatives par des jeux à utilités transférables  $(N, \nu)$  et  $(A, \omega)$  respectivement. Le nombre  $\nu(S)$  désigne la valeur de  $S$  alors que  $1 - \omega(B)$  évalue la résistance de  $B$ , la quantité de valeur qu'il faut pour que  $B$  soit réalisé. Cette classe de jeu est la seule qui satisfait le *principe de révélation*<sup>3</sup> du pouvoir [24] : pour deux coalitions  $S, T$ , alors  $E(S) \subset E(T)$  ou  $E(T) \subset E(S)$ . Cette classe contient les jeux simples, les jeux anonymes et neutres et les jeux additifs : le cas où  $\nu$  et  $\omega$  sont des mesures de probabilités (ou mesures bornées).

### 3.2 Quelles sont les structures dangereuses ?

Nous disons qu'une structure de pouvoir est dangereuse si elle permet à la formation d'une famille de coalitions qui empêche l'organisation de choisir une issue sociale rationnelle. Nous montrerons comment ces structures exposent l'organisation aux conflits.

Dans la suite, nous appelons *E-configuration d'ordre  $r$*  tout  $2r$ -uplet  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r) \in \mathcal{P}_0(N)^r \times \mathcal{P}_0(A)^r$  tel que  $B_k \in E(S_k)$ ,  $k = 1 \dots r$ . Si les coalitions sont deux à deux disjointes, on les note  $(T_1, \dots, T_r)$  et si les ensembles d'alternatives sont deux à deux disjointes, on utilise  $(C_1, \dots, C_r)$ .

*Cycle supérieur d'ordre  $r$*  (J. Abdou (1982))[1][3]. C'est une *E-configuration* d'ordre  $r$ ,  $(T_1, \dots, T_r, B_1, \dots, B_r)$  telle que pour tout  $k \neq l$ ,  $T_k \cap T_l = \emptyset$  et  $B_1 \cap \dots \cap B_r = \emptyset$ .

La famille  $(T_1, \dots, T_r)$  est formée de coalitions deux à deux disjointes, donc sans joueurs communs qui pourront jouer le rôle d'intermédiaire entre ces différentes coalitions. L'égalité  $B_1 \cap \dots \cap B_r = \emptyset$  entraîne que  $B_1^c \cup \dots \cup B_r^c = A$  donc la famille  $(T_1, \dots, T_r)$  peut bloquer la totalité des alternatives qui permettra à son tour que l'organisation n'ait aucune alternative sans objection.

*Cycle inférieur d'ordre  $r$*  (J. Abdou (1982))[1][3]. C'est une *E-configuration* d'ordre  $r$ ,  $(S_1, \dots, S_r, C_1, \dots, C_r)$  telle que pour tout  $k \neq l$ ,  $C_k \cap C_l = \emptyset$  et  $S_1 \cap \dots \cap S_r = \emptyset$ .

Contrairement au cycle supérieur,  $\bigcap_{k \in J} S_k$  peut ne pas être vide pour  $J \subsetneq \{1, \dots, r\}$ . Donc, ces coalitions ont des joueurs intermédiaires mais aucun joueur ne joue ce rôle pour la famille  $(S_1, \dots, S_r)$ . Considérons par exemple un couple où la femme et l'homme sont également membres de leurs familles

---

3. Le terme de *révélation* est utilisé par Otten & al. dans [24]. C'est-à-dire que les coalitions sont ordonnées par leurs pouvoirs. Donc, pour une action donnée, on peut savoir quelles sont les coalitions qui en sont capables.

d'origine. Nous avons trois coalitions  $S_1, S_2, S_3$  où  $S_1$  désigne le couple, alors  $S_1 \cap S_k \neq \emptyset, k = 1, 2$ . Dans cet exemple, aucune personne n'est dans les trois coalitions, et cette absence d'intermédiaire expose  $N = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  aux conflits. Plus généralement, la famille  $(S_1, \dots, S_r)$  a la possibilité de bloquer la totalité des alternatives en sachant que  $C_k \cap C_l = \emptyset$ .

*Cycle circulaire d'ordre  $r$  de taille  $c$*  (Razafimahatolotra.D(2008), [31]). C'est une  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  d'ordre  $r$  telle qu'il existe  $(T_1, \dots, T_r)$  une partition de  $N$ ,  $(C_1, \dots, C_r)$  une partition de  $A$  et  $c \leq r$  tels que pour tout  $k = 1 \dots r$ ,  $B_k = C_k \cup \dots \cup C_{k+c-1}$  et  $S_k = T_{k+c} \cup \dots \cup T_{k-1}$ .

Ce cycle est une généralisation des deux premiers. Il permet d'identifier particulièrement les conflits dans une organisation anonyme et neutre.

*Cycle d'ordre  $r$*  (H. Keiding (1985)[17]). C'est une  $E$ -configuration d'ordre  $r$ ,  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  telle qu'il existe  $(C_1, \dots, C_r)$  (sa base) une partition de  $A$  telle que  $\forall J \subset \{1, \dots, r\}, \cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$  entraîne qu'il existe  $\theta(J) \in J$  tel que  $B_{\theta(J)} \cap C_k = \emptyset, \forall k \in J$ .

La condition  $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$  signifie qu'il existe un joueur qui jouerait le rôle d'intermédiaire entre les coalitions  $S_k, k \in J$ . Dans ce cas, l'une des coalitions, donc  $S_{\theta(J)}$ , a le pouvoir de bloquer la réunion des ensembles d'alternatives qui ont été bloqués initialement par les  $S_k$ . Donc, à chaque fois que la famille de coalitions  $(S_k)_{k \in J}$  admet un intermédiaire, on doit attribuer à l'une d'entre elles les pouvoirs de tous les  $S_k, k \in J$ . L'existence de cycle est à la fois nécessaire et suffisante pour que l'organisation n'ait aucune issue sociale rationnelle.

### 3.3 Comment pousser au désordre ?

Pour déstabiliser une organisation, il faut considérer deux choses : les pouvoirs des coalitions et les préférences des joueurs. Pour illustration, considérons les exemples suivants :

**Exemple 3.2.** Soit  $N = \{1, \dots, n\}$  une organisation où la position  $x$  n'est désirable pour personne, et supposons que cette organisation doit désigner un joueur à la position  $x$ . L'issue sociale est donc de la forme "i assure la fonction  $x$ ". Donc,  $A = N$ .

Considérons les deux modes d'attributions de pouvoirs suivants :

- 1— On donne à chaque joueur le moyen d'éviter la position  $x$ ;
- 2— On donne à la coalition  $N \setminus \{i\}$  le pouvoir de désigner  $i$ .

La distribution du pouvoir dans 1 est définie par  $\forall i \in N, E_1(\{i\}) = \{N \setminus \{i\}, N\}$  et celui de 2,  $E_2(N \setminus \{i\}) = \{S \subset N \mid S \ni i\}$ . Avec la première forme d'organisation, pourvu que  $\{i\}$  soit la pire alternative de  $i$  alors personne n'est désignée. Ainsi, l'issue sociale est vide. Avec la deuxième forme,



si les membres de  $N \setminus \{i\}$  arrivent à se mettre d'accord pour désigner  $i$ , alors l'issue sociale n'est pas vide car  $\{i\}$  n'a aucun pouvoir pour faire objection à cette proposition. Pourtant, dans le profil montré dans le tableau suivant, l'organisation 2 tombe dans le conflit :

$$\begin{array}{ccccc}
 n & \dots & n-1 & \dots & n-1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 2 & \dots & i+1 & \dots & 1 \\
 1 & \dots & i & \dots & n \\
 R^1 & \dots & R^i & \dots & R^n
 \end{array}$$

Un tel profil existe mais il n'est pas évident que les joueurs rangent les alternatives de cette façon.

**Exemple 3.3.** *Contrairement à l'exemple 3.2, supposons que la fonction  $y$  est désirable. On a toujours  $N = A = \{1, \dots, n\}$*

Pour que cette société s'expose facilement aux conflits, on donne à au moins deux coalitions le pouvoir de prendre la fonction  $y$ . Dans le cas extrême, soit  $E_3$  la fonction où chaque  $i \in N$  a le moyen de sélectionner la fonction  $y$ . Dans ce cas, il suffit que deux joueurs se disputent  $y$  pour que la société toute entière soit bloquée. Si nous comparons  $E_1$  avec  $E_3$ , nous observons que tous les deux possèdent des cycles supérieurs mais  $E_1$  ne peut être troublée par des  $p$ -coalitions ( $p < n$ ) alors que  $E_3$  perd sa stabilité avec seulement deux coalitions, ou même deux joueurs. En outre,  $E_1$  ne possède qu'un seul cycle alors que  $E_3$  en possède plusieurs. Ainsi, le degré de manipulation d'une organisation, dans le sens de pousser des joueurs à agir comme on le souhaite, dépend de trois paramètres : la structure, l'ordre minimal et le nombre des cycles de l'organisation.

Les exemples 3.2 et 3.3 sont dans une situation où l'on connaît la structure des préférences des joueurs. On connaît également les sujets sur lesquels ils se disputent et risquent de se mettre en désaccord. Cette information cumulée avec la connaissance de la structure du pouvoir permet alors d'entreprendre une manipulation contre la stabilité de l'organisation. Cependant, il est possible de pousser l'organisation au désordre permanent si l'on connaît le profil de joueurs, en jouant sur la répartition des pouvoirs, ou si l'on connaît la répartition des pouvoirs en jouant sur les profils. En effet, on peut ajouter des alternatives fictives ou réelles par rapport auxquelles les attentes entre les joueurs sont difficiles.

### 3.4 Comment réguler une organisation ?

Le mot "régulation" fait entendre une intervention supprimant certaines actions ou certains moyens pour orienter le fonctionnement d'une organisation. Dans son usage avec la fonction d'effectivité, la régularité est définie

par l'absence de deux coalitions disjointes qui ont le pouvoir de bloquer ensemble la totalité des alternatives. Le mot "régulier" (dont nous faisons usage ici) fait référence à une politique qui fait passer une organisation d'une structure plus exposée aux conflits à une structure moins exposée à ce problème, voire stable. La question comment réguler signifie donc "Comment fixer les pouvoirs pour éviter ou minimiser les conflits"?. Dans un premier temps, nous décrivons les propriétés qui contribuent à la régulation d'une structure de pouvoir. Ensuite, nous donnerons les relations entre ces propriétés et la stabilité.

### 3.4.1 Des propriétés régulatrices

*Régularité.*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ ,  $B \in E(S)$  et  $C \in E(T)$  entraîne  $B \cap C \neq \emptyset$  ou  $S \cap T \neq \emptyset$ .

Cette propriété empêche qu'il y ait deux pouvoirs qui s'excluent mutuellement. C'est-à-dire qu'une coalition est capable d'exclure une partie des alternatives tandis qu'une autre, disjointe avec la première, est capable d'exclure l'ensemble des alternatives restantes. En cas de non-régularité, l'organisation tombera facilement dans une situation de conflits. En effet, il suffit que tous les membres de  $S$  préfèrent les alternatives de  $B$  à celles de  $C$ , et que tous les membres de  $T$  fassent l'inverse.

*Sur-additivité.*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$  tels que  $S \cap T = \emptyset$ .  $B \in E(S)$  et  $C \in E(T)$  entraîne  $B \cap C \in E(S \cup T)$  (en particulier  $B \cap C \neq \emptyset$ ).

La sur-additivité est plus restrictive que la régularité. H. Moulin l'interprète comme signifiant "L'union fait la force" car le pouvoir de deux coalitions auparavant disjointes est au moins équivalent à la réunion de leurs pouvoirs respectifs. Toutefois, elle n'est ni nécessaire ni suffisante pour que  $E$  soit stable. Elle contribue seulement à la régulation des conflits et permet d'éviter les situations comme celles du cas de la non-régularité.

*Sous-additivité.*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$  tels que  $B \cap C = \emptyset$ .  $B \in E(S)$  et  $C \in E(T)$  entraîne  $B \cup C \in E(S \cap T)$ . (En particulier  $S \cap T \neq \emptyset$ ).

La sous-additivité prescrit que *chaque coalition est faible ou possède une sous coalition à l'origine de son pouvoir*. En effet, soit  $S$  une coalition effective pour  $B$ . Si, pour tout  $T \in \mathcal{P}_0(N)$  et pour tout  $B \in E(T)$ , nous avons  $B \cap C \neq \emptyset$ , alors l'exercice de  $B$  ne garantit aucun pouvoir à  $S$ . Si au contraire, il existe une coalition  $T$  effective pour  $C$ ,  $C \cap B = \emptyset$ . Alors,  $S \cap T \subset S$  est effectif pour  $B \cup C$ . Donc,  $S \setminus T$  ne fait que raffiner  $B \cup C$  pour avoir  $B$ . Comme la sur-additivité, la sous-additivité n'est ni nécessaire ni suffisante pour la stabilité, mais elle contribue à la régulation des conflits, et permet d'éviter les conflits triviaux comme dans l'irrégularité.

*★-sur-additivité*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N), \forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$  tels que  $S \cup T = N$ .  $B \cup C \in E(S \cap T)$  entraîne  $B \in E(S)$  ou  $C \in E(T)$ .

Si on pose  $Q = S \cap T$  et  $D = B \cup C$ , alors les membres de  $Q$  ont le moyen de raffiner son pouvoir, soit par l'union avec  $S \setminus Q$  pour atteindre  $B$ , soit par l'union avec  $T \setminus Q$  pour atteindre  $C$ . D'une autre manière, l'★-sur-additivité peut être interprétée comme une réponse à une quête sur la source du pouvoir de  $Q$ . Pour un jeu ★-sur additif, la force de l'union ne dépasse pas l'union de la force (Abdou).

*★-sous additivité*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N), \forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$  tels que  $B \cup C = A$ .  $B \cap C \in E(S \cup T)$  entraîne  $B \in E(S)$  ou  $C \in E(T)$ .

*Convexité.*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N), \forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ .  $B \in E(S)$  et  $C \in E(T)$  entraîne  $B \cap C \in E(S \cup T)$  ou  $B \cup C \in E(S \cap T)$ .

Un jeu convexe est régulier, sur-additif et sous additif. Il satisfait non seulement que l'union fait la force, mais également que plus on agrandit, plus les gains marginaux sont grands. De même, l'interprétation de la sous-additivité est renforcée pour la convexité. En outre, la convexité est la seule propriété à la fois mathématiquement simple et suffisante pour la stabilité. Toutefois, dans la plupart des cas, elle n'est pas nécessaire. Dans le cas extrême de la convexité, on peut avancer l'interprétation suivante : ou bien  $E$  donne des pouvoirs faibles aux coalitions propres (sous-ensembles stricts de  $N$ ) ou bien  $E$  devient oligarchique. Bref, la convexité n'est pas une répartition idéale des pouvoirs pour assurer à la fois la stabilité et les libertés des joueurs.

*★-convexité.*  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N), \forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$  tels que  $S \cap T \neq \emptyset$  et  $B \cap C \neq \emptyset$ .  $B \cap C \in E(S \cup T)$  et  $B \cup C \in E(S \cap T)$  entraîne  $B \in E(S)$  ou  $C \in E(T)$ .

Contrairement à la convexité, un jeu ★-convexe satisfait la propriété de *décentralisation du pouvoir*. Plus la taille de la coalition s'agrandit, plus les gains marginaux sont petits. Il pousse les joueurs à participer sitôt que possible dans le jeu. L'★-convexité ne contribue pas à la régulation des conflits car les pouvoirs sont éparpillés. Toutefois, sa condition de stabilité permet un contrôle facile pour éviter les conflits.

*Maximalité.*  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N), \forall B \in \mathcal{P}(A), B \notin E(S) \Rightarrow A \setminus B \in E(N \setminus S)$ . Cette propriété prévoit que si une coalition  $S$  n'est pas effective pour  $B$ , alors son complémentaire aura le pouvoir de le bloquer. D'une autre manière, si une coalition est faible, pour éviter la perte inutile des actions possibles, on donne à son complémentaire le droit d'agir. La maximalité ne contribue en rien à la stabilité. Dans le cas où la structure de pouvoir est déjà instable, la maximalité intensifie la vulnérabilité de la société aux conflits car elle donne la permission d'agir aux coalitions dont les complémentaires ne sont pas en mesure de mener l'action. Cependant, elle aide à la mise en évidence des conflits d'origine structurelle.

### 3.4.2 Les moyens de régulation

#### a) Agir sur l'allocation du pouvoir

Cette politique de régulation consiste à agir directement sur la répartition du pouvoir. Il ne s'agit pas toutefois de contraintes explicites ou de politiques contraignantes mais d'une mise en place d'une distribution de pouvoir satisfaisant une ou plusieurs des propriétés de la régularité. La proposition suivante, par exemple, donne une condition pour éviter les cycles supérieurs et inférieurs.

**Proposition 3.4** (J. Abdou (1982) [1]). *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Alors :*

- (i) *Si  $E$  admet un cycle supérieur ou inférieur, alors  $E$  a un cycle ;*
- (ii) *Une fonction d'effectivité sur-additive n'admet aucun cycle supérieur ;*
- (iii) *Une fonction d'effectivité sous-additive n'admet aucun cycle inférieur.*

Donc, il n'est pas possible de déstabiliser une société par un cycle supérieur si tous les membres jouent selon le principe de "l'union fait la force". Si en outre, les joueurs intermédiaires ( $S \cap T$ ) ont le pouvoir de bloquer l'intersection ( $B^c \cap C^c$ ) des alternatives bloquées par les deux coalitions, alors la société n'est jamais manipulable. Formellement,

**Théorème 3.5.** (B.Peleg & H.Moulin(21)). *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Alors :*

- (i) *Si  $E$  est sur et sous additif, alors  $E$  est convexe ;*
- (ii) *Si  $E$  est convexe, alors  $E$  est stable.*

La convexité d'une organisation signifie que les joueurs n'ont aucun intérêt à agir seul ou à s'intégrer dans les petits groupes car ils auront plus de pouvoir dans les grandes coalitions. De manière négative, cela signifie que les petits groupes n'ont aucune possibilité de se former en cycle, et plus généralement n'ont que des pouvoirs faibles. Ce problème oblige donc à faire un arbitrage entre la stabilité et l'attribution du pouvoir. Ici, le souci de la stabilité a tendance à donner moins de pouvoir aux coalitions, alors que ce dernier conduit à la privation des moyens à certains acteurs. Pour éviter les pertes inutiles des moyens d'actions et les pouvoirs non nécessaires, H. Keiding propose la condition suivante :

**Théorème 3.6** (H. Keiding (1985)[17]). *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Alors  $E$  est stable si et seulement si elle ne possède aucun cycle.*

Le cycle est une notion moins intuitive et difficile à surveiller pour une organisation à grand nombre de joueurs. La possibilité de l'écrire plus simplement offre donc un moyen qui facilite la surveillance des pouvoirs

qui peuvent provoquer inutilement le désordre. Elle permet également de contrôler l'attribution des pouvoirs non déployés sans nuire à la stabilité. La procédure qui répond à cette seconde condition consiste à donner aux coalitions, dont les complémentaires sont incapables de forcer l'issue sociale à être un élément de  $B$ , le moyen de bloquer les alternatives dans  $B$ . C'est-à-dire : la fonction devient maximale. Dans ce cas, l'ordre minimal des cycles est 2 ou 3 [?]. La simplification des surveillances des dérivées du pouvoir est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 3.7.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité maximale. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $E$  ne possède ni cycle inférieur ni cycle supérieur ;
- (2i)  $E$  ne possède aucun cycle circulaire ;
- (3i)  $E$  ne possède aucun cycle ;
- (4i)  $E$  est sur-additive et sous-additive ;
- (5i)  $E$  est convexe ;
- (6i)  $E$  est stable.

Un autre moyen pour faciliter la surveillance de la structure du pouvoir consiste à adopter le principe de symétrie ou de l'anonymat des joueurs. Dans ce cas, si le pouvoir est neutre par rapport aux alternatives, nous avons :

**Théorème 3.8.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone anonyme et neutre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $E$  ne possède aucun cycle circulaire ;
- (2i)  $E$  ne possède aucun cycle ;
- (3i)  $E$  est stable.

### b) Agir sur l'espace des actions

Cette politique consiste à gérer la structure de pouvoir via la modification de l'espace de stratégies des joueurs. Ce changement peut rester au niveau de l'espace de stratégies mais peut également modifier l'ensemble des états sociaux, conséquence des stratégies conjointes. Reprenons l'exemple 1.2. L'éviction des conflits dans  $E_\beta$  peut se faire soit par la précision des textes par rapport aux différentes circonstances, soit par la souplesse de la mise en application de la loi. La mise en place des alternatives de dernier recours qui échappent au veto est aussi une solution qui peut minimiser les conflits.

### c) Agir sur le choix des règles

Si le pouvoir vient d'une correspondance de choix social  $H$ , il est naturel que toute régulation sur  $E^H$  passe par  $H$ . Reprenons l'exemple 2.5 et supposons que  $\forall k = 3 \dots m; P(x_k) < P(x_1) = P(x_2)$ . Donc, l'issue sociale est

un élément de  $\{x_1, x_2\}$ . Pourtant, dans le profil détaillé du tableau suivant,  $x_1$  et  $x_2$  admettent des objections :

...					...	$x_1$	...	$x_1$
...					...	$x_l$	...	$x_2$
...					...	$x_2$	...	$x_2$
$\vdots$					$\vdots$			$\vdots$
$x_2$	...	$x_2$	$x_k$	...	$x_k$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_3$	...	$x_3$	$x_3$	...	$x_3$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_1$	...	$x_1$	$x_1$	...	$x_1$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_k$	...	$x_k$	$x_2$	...	$x_2$	$x_3$	...	$x_3$
$R^1$	...	$R^{n-q}$	$R^{n-q+1}$	...	$R^q$	$R^{q+1}$	...	$R^n$

On peut vérifier que  $P(x_1) = P(x_2) > P(x_3)$  et  $(\{1, \dots, q\}; \{x_3\})$  est une objection contre  $x_1$  et  $(\{n - q + 1, \dots, n\}, \{x_1\})$  est une objection contre  $x_2$ . Ici, les pouvoirs alloués par  $H$  n'assurent pas la stabilité des alternatives sélectionnées. Pour qu'une telle éventualité ne se produise pas, il faut que  $H$  satisfasse les conditions du théorème suivant :

**Théorème 3.9** (H. Keiding & Razafimahatolotra D. (2008)). *Soit  $H : \mathcal{L}(A) \longrightarrow A$  une correspondance de choix social. Si  $H$  satisfait les conditions (i), (ii), (iii) suivantes, alors  $H = \mathcal{C}(E_\kappa^H, \cdot)$*

- (i)  $\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N; x, y \in A, x R^N y \Rightarrow y \notin H(R^N)$ ;
- (ii)  $\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N; x, y \in A$ , si  $y \notin H(R^N)$  et  $Q^N$  est obtenu de  $R^N$  en améliorant  $x$ , alors  $y \notin H(Q^N)$ ;
- (iii)  $\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N, y \notin H(R^N)$ , il existe  $S \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$  et  $B = \{x \mid x R^S y\}$  tel que  $\forall Q^S \in \mathcal{L}(A)^S, [B Q^S y Q^S (A \setminus B \cup \{y\})] \Rightarrow y \notin H(Q^S, R^{N \setminus S})$ .

La première condition, la condition de Pareto, signifie que si tous les joueurs préfèrent  $x$  à  $y$ , alors  $y$  ne sera pas l'issue finale du jeu. La condition (ii), qui porte le nom d'antimonotonie, signifie que si  $y$  n'est pas le *statu quo* et qu'aucun joueur n'améliore le rang de  $y$ , alors  $y$  ne sera pas l'issue du jeu. La condition (iii) signifie que pour chaque  $y$  en dehors de l'issue du jeu, il existe au moins une coalition  $S$  et un ensemble d'alternatives  $B$  tels que si  $S$  est déterminé à exclure  $y$  via  $B$ , alors quelque soit le  $(N \setminus S)$ -profil des joueurs restants,  $y$  restera en dehors des issues du jeux.

### 3.5 Peut-on localiser l'issue sociale stable ?

Les conditions de stabilité que nous avons étudiées nous permettent d'affirmer que l'organisation est stable, mais elles ne donnent aucune indication sur l'issue sociale. Reprenons l'exemple 2.5 avec une version simplifiée :

**Exemple 3.10.** *Supposons que  $N = \{1, \dots, n\}$  va choisir l'un des trois candidats  $x_1, x_2, x_3$  avec la règle de l'exemple 2.5*

Il y a deux façons avec des procédures différentes pour déterminer l'issue sociale de ce jeu qui est stable. Premièrement, on connaît les préférences et on décompte les points obtenus par chaque candidat selon la règle déjà fixée. Deuxièmement, on connaît les coalitions qui décident de faire objection contre tel ou tel candidat. Dans le premier cas, supposons que les préférences soient données par  $\forall i = 1 \dots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ;  $R^i = R^a$  et  $\forall i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \dots n$ ;  $R^i = R^b$  où

$$\begin{array}{cc} x_3 & x_1 \\ x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 \\ R^a & R^b \end{array}$$

Le comptage des points des trois candidats donne l'élection de  $x_3$ . En effet,

$$P(x_2) = 3 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \quad P(x_1) = 4 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \quad P(x_3) = 5 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Dans le deuxième cas, supposons que les membres de  $S_1 = \{1, \dots, n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1\}$  ont l'intention de voter pour  $x_3$ . Cela peut se traduire par une objection de  $S_1$  contre  $x_2$  ou contre  $x_1$  via l'élection de  $x_3$ . Admettons que les joueurs restants ne soient pas regroupés en coalition pour faire opposition contre un candidat, alors l'intersection des ensembles des candidats qui ont obtenu une intention de vote vaut  $\{x_3\} \cap A = \{x_3\}$ , donc  $x_3$  sera élu. Maintenant, supposons que les membres d'une coalition  $S_2$  de taille  $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ , par exemple  $S_2 = \{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \dots, n\}$ , ont une intention de vote pour  $x_2$ . Donc, les joueurs dans  $\{n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \dots, n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1\}$  ont deux intentions différentes de votes :  $x_3$  et  $x_2$ . Ces intentions ne se transforment en réelles oppositions que si l'un des deux candidats est moins préféré que l'autre par tous les joueurs. Dans ce cas, l'intention de vote des membres de  $\{1, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2\}$  est  $\{x_3\}$ , celle des membres de  $\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \dots, n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1\}$ ,  $\{x_3, x_2\}$  et celle des membres de  $\{n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2, \dots, n\}$  est  $\{x_2\}$ . Ainsi, si  $B_k$  désigne l'intention de vote de  $S_k$ , l'ensemble des candidats qui obtiendront l'intention de vote de tous les joueurs est un élément de

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \{x_2\} \cap \{x_2, x_3\} \cap \{x_3\} = \emptyset \quad (3)$$

Cette indétermination provient de la structure des coalitions qui décident de manifester leurs intentions ou propositions.

Le théorème suivant nous montre que, si la famille  $(S_1, \dots, S_r)$  vérifie la condition de la partition généralisée, alors l'intersection dans l'équation 3 est en relation étroite avec la stabilité.

**RAPPEL.** Une famille d'ensembles  $(S_1, \dots, S_r)$  est une partition généralisée seulement s'il existe  $(\lambda_k)_{k=1\dots r}$ ,  $0 < \lambda < 1$  tel que  $\forall i \in N$ ,  $\sum_{k|S_k \ni i} \lambda_k = 1$

A partir de cette structure qui est une généralisation des partitions, on définit :

*Une structure de déséquilibre d'ordre  $r$ .* Une structure de déséquilibre d'ordre  $r$ ,  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  est une  $E$ -configuration telle que  $(S_1, \dots, S_r)$  soit une partition généralisée et la famille  $(B_1, \dots, B_r)$  satisfasse

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k = \emptyset \quad (4)$$

**Théorème 3.11** (Kolpin, 1990[19]). Soit  $E : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Si  $E$  est instable, alors il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $E$  possède une structure de déséquilibre d'ordre  $r$ .

Supposons que la famille de coalitions qui ont manifesté leurs intentions de vote est  $(S_1, \dots, S_4)$  telle que  $S_1 = \{1, \dots, q\}$ ,  $S_2 = \{q+1, \dots, 2q\}$ ,  $S_3 = \{2q+1, \dots, 3q\}$  et  $S_4 = \{3q+1, \dots, n\}$  où  $q = n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ . Chaque joueur  $i \in N$  est membre de 3 coalitions de  $\{S_1, \dots, S_4\}$  donc avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) = (\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3})$ ,  $(S_1, \dots, S_4)$  est une partition généralisée. Si  $S_1$  vote pour  $x_3$  et  $S_2$  pour  $x_2$  alors la linéarité des préférences et l'appartenance de tous les  $i \in N$  à au moins trois coalitions entraînent que  $S_3$  et  $S_4$  voteront pour  $x_3$  ou  $x_2$ . Si tous les deux votent pour  $x_k$ ,  $k = 1, 2$  alors le candidat  $x_k = \{x_3, x_2\} \cap \{x_3, x_k\} \cap \{x_2, x_k\} \cap \{x_k\}$  est élu. Si  $S_3$  et  $S_4$  votent pour différents candidats, il y a indétermination sur le candidat élu car  $\{x_3, x_2\} \cap \{x_3, x_k\} \cap \{x_2, x_l\} \cap \{x_k, x_l\} = \{x_2, x_3\}$ .

Cette condition n'est pas nécessaire en général, ( cf [20] pour un contre exemple) mais pour quelques classes de fonctions d'effectivité, elle est à la fois nécessaire et suffisante.

**Théorème 3.12** (Mizutani, 1994). Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors  $E$  est stable si et seulement si elle est équilibrée.

**Théorème 3.13.** Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone. Si  $E$  est simple ou maximale, alors  $E$  est stable si et seulement elle est équilibrée.

**RAPPEL.** Une sélection sur un ensemble  $\{1, \dots, r\}$  est une fonction  $\theta : \mathcal{P}(\{1, \dots, r\}) \longrightarrow \{1, \dots, r\}$  telle que  $\forall K \subset \{1, \dots, r\}$ ,  $\theta(K) \in K$ .

*Acyclicité  $r$ .* Une  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  est un cycle si et seulement s'il existe une sélection  $\theta : \mathcal{P}(\{1, \dots, r\}) \longrightarrow \{1, \dots, r\}$  telle



que si  $\mathcal{J}_k = \{J \mid k \in J \text{ et } \cap_{l \in J} S_l \neq \emptyset\}$ , alors :

$$\bigcap_{k=1}^r \bigcup_{J \in \mathcal{J}_k} B_{\theta(J)} = \emptyset$$

Cette structure est une version améliorée en termes de stabilité de l'équilibre du pouvoir. Une fonction d'effectivité acyclique, qui ne possède aucun  $r$ , est stable. Inversement, une fonction d'effectivité instable possède un cycle d'ordre  $r$ .

**Théorème 3.14** (Keiding, (1985)[17]). *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Alors  $E$  est instable si et seulement s'il existe  $r$  tel que  $E$  ait un cycle d'ordre  $r$ .*

En conclusion, les deux informations suivantes sont utiles pour une résolution structurelle des conflits :

1- Comment le pouvoir est-il réparti entre les joueurs ?

2 - Quelles sont les tendances préférentielles des différents acteurs ?

Si l'on connaît la première, on peut prévoir les  $E$ -configurations qui pourraient provoquer le désordre, et si l'on connaît la seconde, on peut déterminer les structures de pouvoir qui favorisent le désordre.

## 4 Conclusion

La fonction d'effectivité offre un instrument de politique de gestion de pouvoir dans une organisation. Son développement reste jusqu'à présent au niveau des mathématiques et de ses interprétations. Quelques auteurs ont tenté de proposer des programmes informatiques pour certains résultats mais présentement, aucun résultat exploitable n'est encore disponible. Au niveau calculatoire, telle que la formulation des effectivités des correspondances du choix social, le problème reste encore ouvert. Il en est de même pour la formulation des effectivités des formes de jeux calculables.

## Références

- [1] Abdou J. (1982), "Stabilité de la fonction veto, cas du veto maximal", Mathématiques et Sciences Humaines 80, p 39-65.
- [2] Abdou, J. (2008), "A Stability Index for Local Effectivity Functions", Ongoing paper.
- [3] Abdou, J. et H. Keiding (1991), "Effectivity Functions in Social Choice", Dordrecht : Kluwer Academic press.

- [4] Abdou, J. and H. Keiding (2003), "On necessary and sufficient conditions for solvability of game forms", *Mathematical Social Sciences* 46, p 243 - 260.
- [5] Aghion P. et J. Tirole (1997), "Formal and Real Authority in Organisation", *Journal of Political Economy*, 105, 1-29.
- [6] Baujard, A. and H. Igersheim (2009), "Expérimentation du vote par note et du vote par approbation le 22 avril 2007. Premiers résultats", *Revue Economique*, Vol.60, n°1, Janvier.
- [7] Baujard, A., T. Senné, and H. Igersheim (2009), "An analysis of the French political supply. An analysis based on experimental data", Document de travail CREM.
- [8] Banzhaf J.F (1965), "Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis", *Rutgers Law Review* 19 N° 2, p 317 - 343.
- [9] Barua R., Chakravarty S.R and Roy S. (2007), "A new characterisation of the Banzhaf index of power", Staff General Research papers 12808, Iowa State University, Department of Economics.
- [10] Billera L.J. (1970), "Existence of General bargaining sets for cooperative games without side payments", *Bull. Amer. Math. Soc.* Volume 76, Number 2, p 375 - 379.
- [11] Bondareva, Olga N (1963), "Some applications of linear programming methods". *Problemy Kybernetiki* 10, p 119 - 139.
- [12] Danilov V. and Alexander I. S. (2002), "Social Choice Mechanism", Springer.
- [13] Dubey P, Einy E. and Haimanko O. (2003), "Compound voting and the Banzhaf index", <http://ratio.huji.ac.il/dp/haimanko333.pdf>.
- [14] Greengerg J. (1987) "The core as abstract stable sets", Mimeo, university of Haifa.
- [15] Holzman R. (2001), "The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets", *Int J Game Theory* 29, p 543-553.
- [16] Lehrer E. (1988), "An axiomatisation of the banzhaf value", *International Journal of Game Theory*, 17 Issue 2, p 89-99.
- [17] Hans Keiding (1985), "Necessary and sufficient conditions for stability of effectivity functions", *International Journal of Game Theory*, 14 N°2.
- [18] Hans Keiding and Razafimahatolotra D. (2008), "Core rationalization of the social choice correspondance", papier en cours.
- [19] Kolpin V. (1991), "Mixed effectivity and the essence of stability", *Social Choice and Welfare*, vol 8, p 51 - 63.
- [20] Mizutani M., Nae Chan Lee, Nishino H. (1994), "On the Equivalence of Balancedness and the Stability in Effectivity Function Games", *Journal of Operation Research*, Society of Japan, vol 37, N° 3.

- [21] Moulin H. (1981), "The proportional veto principle", *The Review of Economic Studies*, vol 48 N 3.
- [22] Moulin H. (1994), "The Strategy of Social Choice", *Advanced Textbooks in Economics*, 18.
- [23] Moulin, H. and B.Peleg (1982), "Cores of effectivity functions and implementation theory", *Journal of Mathematical Economics*, 10, p 115 - 162.
- [24] Otten G.-J., Borm P., Storcken T. and Tijs S.(1997), "Decomposable effectivity functions", *Mathematical Social Sciences* 33 Number 3, 1, p 277 - 289.
- [25] Peleg, B. (2005), "Constitutional implementation of social choice correspondance", *International Journal of Game Theory*, 33, p 381-396.
- [26] Peleg, B. (1998), "Effectivity function, game forms, games, and rights", *Social Choice and Welfare* 15, p 67 - 80.
- [27] Picavet, E. (2008), "Talos ou la matrice libéral". Document inclut dans l'Habilitation de Recherche (HDR).
- [28] Picavet, E. (1998), "Rights and Powers : Reflections on Bezalel Peleg's Theory of Effectivity Functions, Game Forms, Games and Rights", in : Laslier, J.-F., Fleurbaey, M., Gravel, N. et Trannoy, A., *Freedom in Economics - New Perspectives in Normative Analysis*, Londres, Routledge.
- [29] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2007), "Sur la formalisation de la pluralité des interprétations en matière normative", Publication of the "Deuxième Congrès de la Société de Philosophie des sciences".
- [30] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2008), "Analysing Plural Normative Interpretations in Social Interactions". Publication de l'Université d'Etat de Saint Petersburg.
- [31] Razafimahatolotra D. (2008), "Structure des organisation instable", travail en cours.
- [32] Shapley L.S (1953), "A value of n-person games", In contribution to the theory of games, volume II, by the Kuhn and A.W Tucker, editors. *Annals of Mathematical Studies* 28, p 307-317. Princeton University Press.
- [33] Shapley L.S. and Shubik, (1954), "A method for evaluating the distribution of Power in a committee system", *American Political Science Review*, 48, p 307-317.
- [34] Straffin P.D., (1988) "The Shapley-Shubik and Banzhaf power indices as probabilities",. *The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley* Chap 5.
- [35] Van Hees, M. (1995), "Rights and Decisions. Formal Models of Law and Liberalism", Dordrecht, Kluwer, Series : Law and Philosophy Library, Vol. 23.

- [36] Vind K. (1992), "Two wharacterizations of bargaining sets", Journal of Mathematical Economics 21, p 89-97.
- [37] Vannucci S., "Effectivity Functions, Opportunity Ranking, and Generalised Desirability Relation", Document de travail, Université de Sienne.
- [38] Young H.P. (1998), "Individual contribution and just compensation",. The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley Chap 17.